



Муниципальное автономное общеобразовательное
учреждение Новосибирского района Новосибирской области -
лицей № 13 п. Краснообск

*Приложение к ООП СОО, утверждённой
приказом директора от 31.08.2026 № 62/2-од
с внесёнными изменениями
приказом директора от 01.09.2026 № 2-од*

Рабочая программа
курса внеурочной деятельности по математике
«Практикум по теории игр и теории чисел»
Для обучающихся 10-11 класса

Программу разработала
учитель математики
высшей квалификационной категории
Фефелова Л.В.

2026 год

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа курса внеурочной деятельности «Теория игр и теория чисел» разработана в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС СОО) и Федеральной образовательной программы среднего общего образования (ФОП СОО). Курс ориентирован на учащихся 10–11 классов, выбравших технологический, естественно-научный или социально-экономический профиль обучения, и направлен на углубление математических знаний.

Актуальность программы обусловлена тем, что теория чисел и теория игр представляют собой фундаментальные разделы современной математики, имеющие колоссальное прикладное значение в криптографии, компьютерной безопасности, экономическом моделировании и теории принятия решений. Кроме того, содержательные линии курса напрямую пересекаются со сложнейшими задачами Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня (в частности, задача №19 на свойства чисел, последовательности и нестандартные логические алгоритмы).

- Цели курса:
- Формирование у старшеклассников целостного математического мировоззрения и культуры математического мышления;
- Развитие навыков решения исследовательских, нестандартных и олимпиадных задач повышенной сложности;
- Освоение математического аппарата теории игр для анализа стратегических взаимодействий в экономике и повседневной жизни.

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА (ФГОС СОО)

Личностные результаты:

- Сформированность научного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития математической науки;
- Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая исследовательскую работу;
- Критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать доказанные факты от гипотез.

Метапредметные результаты:

- Познавательные УУД: умение оперировать математическими понятиями, методами доказательств и опровержений; выстраивать логическую цепочку рассуждений; структурировать информацию и работать с математическими моделями.
- Регулятивные УУД: умение самостоятельно формулировать цели, планировать пути достижения целей, выбирать наиболее эффективные способы решения комплексных математических задач, осуществлять самоконтроль и коррекцию.
- Коммуникативные УУД: умение развернуто обосновывать суждения, аргументированно вести математический диалог, представлять результаты индивидуальной и групповой исследовательской деятельности.

Предметные результаты:

- Владение базовыми понятиями теории чисел: делимость, сравнения по модулю, свойства простых чисел, арифметические функции;
- Умение применять алгоритм Евклида, решать линейные диофантовы уравнения и системы сравнений;
- Понимание принципов открытого шифрования (алгоритм RSA) и математических основ современной криптографии;
- Владение аппаратом теории игр: построение матриц выигрышей, поиск седловых точек, расчет смешанных стратегий.

3. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

10 КЛАСС ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И АРИФМЕТИКА ИГР (34 часа)

Раздел 1. Элементы теории чисел (20 часов). Делимость в множестве целых чисел. Свойства делимости. Признаки делимости. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК). Алгоритм Евклида и его геометрическая интерпретация. Линейное представление НОД. Диофантовы уравнения с двумя переменными. Сравнения по модулю: свойства, арифметические операции. Классы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений. Китайская теорема об остатках. Введение в криптографию: односторонние функции, алгоритм шифрования RSA.

Раздел 2. Комбинаторные игры на выбывание (14 часов). Понятие конечной игры с полной информацией. Позиции выигрышные (Р-позиции) и проигрышные (N-позиции). Анализ игры с конца (обратная индукция). Игра Баше и её математическое обобщение. Игра Ним. Ним-сумма (поразрядное сложение по модулю 2). Теорема Бутона. Эквивалентность комбинаторных игр. Функция Спрага-Гранди для беспристрастных игр. Графы и деревья игр.

11 КЛАСС

СТРАТЕГИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ И БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ (34 часа)

Раздел 3. Бескоалиционные и матричные игры (16 часов). Определение стратегической игры. Игры двух лиц с нулевой суммой. Матрица выигрышей. Принцип минимакса и максимина. Седловые точки в чистых стратегиях. Строго детерминированные игры. Смешанные стратегии. Определение выигрыша в смешанных стратегиях. Основная теорема теории игр. Графический метод решения матричных игр 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$. Упрощение матриц с помощью доминирования стратегий.

Раздел 4. Модели взаимодействия (18 часов). Игры с ненулевой суммой. Понятие бескоалиционной игры в нормальной форме. Равновесие по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях. Эффективность по Парето. Сравнение концепций оптимальности. Классические парадоксы: «Дилемма заключенного», «Битва полов», «Игра в цыпленка». Прикладные математические модели: олигополия Курно и Бертрана. Динамические игры: развернутая форма игры, совершенное в подиграх равновесие Нэша.

4. КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ. 10 КЛАСС (1 ч в неделю, всего 34 ч)

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения занятия
1	Введение в курс. Исторический очерк теории чисел и теории игр.	1	Лекция-дискуссия
2	Делимость целых чисел. Основные теоремы и свойства.	1	Семинар
3	Признаки делимости в различных системах счисления.	1	Практикум
4	Простые и составные числа. Основная теорема арифметики.	1	Практикум
5	Наибольший общий делитель (НОД). Алгоритм Евклида.	1	Математическая лаборатория
6	Диофантовы уравнения с двумя переменными: теория и алгоритм решения.	1	Практикум
7	Решение нестандартных диофантовых уравнений повышенной сложности.	1	Семинар-исследование
8	Сравнения по модулю. Определение и основные свойства.	1	Лекция с элементами практики
9	Арифметические операции в классах вычетов.	1	Практикум
10	Теорема Ферма и её приложения в вычислениях.	1	Практикум
11	Функция Эйлера и её свойства. Теорема Эйлера.	1	Математический воркшоп

12	Линейные сравнения с одной переменной. Способы решения.	1	Практикум
13	Китайская теорема об остатках и её исторические корни.	1	Семинар
14	Практикум по решению олимпиадных задач на теорему об остатках.	1	Мастер-класс
15	Математические основы асимметричного шифрования.	1	Лекция
16	Алгоритм криптосистемы RSA: математический разбор.	1	Лабораторная работа
17	Построение криптосистем вручную на малых числах.	1	Практикум
18	Подготовка и защита мини-проектов: «Математика и криптография».	1	Конференция
19	Разбор задач №19 профильного ЕГЭ по математике (целые числа).	1	Интенсив
20	Разбор задач №19 профильного ЕГЭ (последовательности и алгоритмы).	1	Интенсив
21	Понятие комбинаторной игры. Дерево игры и обратная индукция.	1	Лекция-игра
22	Игра Баше. Нахождение выигрышных стратегий.	1	Математический турнир
23	Модификации игры Баше с изменяемым числом предметов.	1	Семинар
24	Игра Ним с одной и двумя кучами. Понятие Р- и N-позиций.	1	Практикум
25	Классическая игра Ним с тремя кучами. Теорема Бутона.	1	Игровой практикум

26	Ним-сумма: поразрядное сложение по модулю 2 и его свойства.	1	Математическая лаборатория
27	Эквивалентность игр. Введение в теорию Спрага-Гранди.	1	Лекция
28	Функция Спрага-Гранди (ним-значения) для простых игр.	1	Практикум
29	Вычисление функции Гранди для сложных комбинаторных игр.	1	Практикум-исследование
30	Игры на графах. Анализ позиций на ориентированных графах.	1	Семинар
31	Решение комплексных олимпиадных задач на стратегии игр.	1	Олимпиада
32	Проектирование авторских комбинаторных математических игр.	1	Проектная сессия
33	Защита проектов игровых стратегий.	1	Презентация проектов
34	Итоговое занятие 10 класса. Подведение итогов, математический бой.	1	Интерактивная игра

КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ.

11 КЛАСС (1 ч в неделю, всего 34 ч)

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения занятия
1	Введение в стратегические игры. Матричная форма представления.	1	Лекция
2	Игры двух лиц с нулевой суммой. Концепция чистых стратегий.	1	Семинар

3	Принцип минимакса. Поиск седловых точек в матрице выигрышей.	1	Практикум
4	Строго детерминированные игры. Примеры из экономики и логики.	1	Семинар-исследование
5	Понятие смешанных стратегий. Вероятностный подход в математике.	1	Лекция
6	Математическое ожидание выигрыша в смешанных стратегиях.	1	Практикум
7	Основная теорема теории игр (Фон Неймана). Исторический экскурс.	1	Семинар
8	Графический метод решения матричных игр размера 2×2 .	1	Мастер-класс
9	Решение матричных игр размера $2 \times n$ графическим способом.	1	Практикум
10	Решение матричных игр размера $m \times 2$ графическим способом.	1	Практикум
11	Доминирование стратегий. Метод сокращения размерности матриц.	1	Семинар
12	Применение доминирования для решения сложных игр.	1	Практикум
13	Математическое моделирование конфликтных ситуаций матрицами.	1	Деловая игра
14	Решение прикладных экономических задач с нулевой суммой.	1	Практикум
15	Повторение и обобщение раздела «Матричные игры».	1	Контрольный практикум
16	Разбор сложных теоретико-игровых сюжетов из олимпиад по математике.	1	Интенсив

17	Игры с ненулевой суммой (бескоалиционные игры). Основные отличия.	1	Лекция
18	Нормальная форма игры для нескольких игроков.	1	Семинар
19	Концепция равновесия по Нэшу. Математическое определение.	1	Лекция с элементами практики
20	Поиск равновесия Нэша в чистых стратегиях для матриц 2x2.	1	Практикум
21	Эффективность по Парето. Математический оптимум многокритериального выбора.	1	Семинар
22	Конфликт между оптимумом Парето и равновесием Нэша.	1	Дискуссионный семинар
23	Парадокс «Дилеммы заключенного»: математическая модель.	1	Деловая игра / симуляция
24	Моделирование кооперирования в повторяющейся дилемме заключенного.	1	Исследовательский практикум
25	Классические игры: «Битва полов» и «Игра в цыпленка».	1	Практикум
26	Равновесие Нэша в смешанных стратегиях для игр с ненулевой суммой.	1	Математическая лаборатория
27	Математические модели олигополии: дуополия Курно.	1	Семинар-исследование
28	Математические модели олигополии: модель Бертрана.	1	Практикум
29	Динамические игры в развернутой форме. Информационные множества.	1	Лекция
30	Деревья решений в развернутых играх. Метод Kuhn-обратной индукции.	1	Практикум

31	Совершенное в подиграх равновесие Нэша.	1	Семинар
32	Защита курсовых мини-проектов: «Теория игр в реальных процессах».	1	Защита проектов
33	Защита курсовых мини-проектов (продолжение).	1	Защита проектов
34	Итоговая конференция. Анализ результатов, вручение сертификатов.	1	Круглый стол

5. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение:

- Учебная аудитория, оборудованная интерактивной доской или проектором;
- Методические материалы учителя: презентации, сборники олимпиадных задач по математике, сборники КИМ профильного уровня.

Литература для учителя и учащихся:

- Оре О. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980 (и переиздания).
- Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998.
- Шагал С. В. Элементы теории чисел в школьном курсе математики. — М., 2015.
- Данилов В. И. Лекции по теории игр. — М.: РЭШ, 2002.
- Материалы открытого банка заданий ФИПИ (профильная математика, задание №19).

Система оценки планируемых результатов:

Оценка результатов освоения курса внеурочной деятельности является безотметочной и строится на основе критериев успешности выполнения практических заданий, активности в математических боях и деловых играх, а также по результатам защиты индивидуальных или групповых исследовательских мини-проектов в конце каждого учебного года.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧЕНИКА 10 *11

КЛАСС

1.учебник «Алгебра и начала математического анализа», А.Г.Мордкович

2.учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колягин

Звавич

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

10-11 КЛАСС Методические разработки «Алгебра и математический анализ »
А.Г.Мордкович;

Видеоуроки Учи.ру;

**ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ И РЕСУРСЫ СЕТИ ИНТЕРНЕТ 7
КЛАСС**

ЯКласс; Учи.ру; РЭШ

10-11 КЛАСС

**МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
ПРОЦЕССА:**

УЧЕБНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Ксерокс, компьютер, мультимедийная доска.

ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ Смартфоны
учащихся